**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI**

**Báo cáo giải tích số**

**Phương pháp Adam giải phương trình vi phân**

|  |  |
| --- | --- |
| **Giảng viên hướng dẫn:** | TS Hà Thị Ngọc Yến |
| **Họ tên sinh viên:** | Hà Huy Phúc Nguyên |
| **MSSV:** 20200446 |  |

Mục lục

**Lý thuyết của phương pháp**

Phương pháp Adam-Bashforth

Phương pháp Adam-Moulton

**Thuật toán**

Tìm hệ số của phương pháp

Phương pháp Adam-Bashforth 4 bước

Phương pháp Adam-Moulton 4 bước

Phương pháp AM-AB 4 bước dự báo hiệu chỉnh

**Ví dụ**

**Kết luận**

**Phần 1: Cơ sở lý thuyết**

Phương pháp Adam giải phương trình vi phân  với , có phương trình sai phân dùng để tìm giá trị xấp xỉ của tại điểm lưới  được biểu diễn bằng phương trình sau với : với , với các giá trị  cho trước. Nếu phương pháp được gọi là phương pháp hiện, nếu phương pháp được gọi là phương pháp ẩn.

Xét bài toán Cauchy:  với với . Các điểm trên đoạn [,] là có bước là . Tích phân phương trình vi phân trên đoạn , ta được (1). Tuy nhiên tại bước này không tính được tích phân trực tiếp do  không biết trước. Vì thế thay vì tích phân hàm  , cần tính tích phân của đa thức nội suy với các điểm cho trước . Giả sử , khi đó : . 

Xây dựng công thức Adam-Bashford m bước :

Công thức được xây dựng bằng cách sử dụng đa thức nội suy Newton lùi  với các điểm  thay , ta có: 

Khi đó : 

Nếu công thức dừng lại ở sai phân bậc k, ta có sai số của công thức là: 

Ta có công thức 

Xây dựng công thức Adam-Moulton m bước :

Công thức được xây dựng khi sử dụng thêm điểm như 1 điểm dùng trong phép nội suy của đa thức nội suy. Áp dụng đa thức nội suy Newton tại móc :

Tiến hành tích phân 2 vế của phương trình, ta có : 

Nếu công thức dừng lại ở sai phân bậc k, ta có sai số của công thức là: 

Công thức cũng có sai số cấp 

Miền ổn định của thuật toán:

Thuật toán đa bước thỏa mãn điều kiện nghiệm của phương trình đặc trưng(2)thỏa mãn điều kiện với mọi nghiệm .Nếu  thì là nghiệm duy nhất của phương trình.

Thuật toán đa bước ổn định nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn điều kiện nghiệm của phương trình (2).

Định lý : Phương pháp đa bước ổn định mạnh nếu =1 là nghiệm duy nhất của .Nếu thì thuật toán có tính ổn định yếu.

Hệ số của 2 phương pháp:

**Phương pháp Adam-Bashforth**:



Đặt 

Với , 



Suy ra 

Xét hệ số của số hạng , ta có quan hệ của các :

Hệ số của các  trong khai triển của  có dạng với j chạy từ 0 đến i, i chạy từ 0 đến n

Lưu các hệ số hệ số của các trong ma trận vuông cấp n và lưu các hệ số ở ma trận hàng có n cột .Nhân 2 ma trận ta sẽ có được ma trận chứa hệ số của phương pháp

=,

là các hệ số của phương pháp

**Phương pháp Adam-Moulton**:



Đặt  , 

Chứng minh tương tự , ta có :



Hệ số của các  trong khai triển của  có dạng với j chạy từ 0 đến i, i chạy từ 0 đến n

Lưu các hệ số hệ số của các trong ma trận vuông cấp n và lưu các hệ số ở ma trận hàng có n cột .Nhân 2 ma trận ta sẽ có được ma trận chứa hệ số của phương pháp:

=,

là các hệ số của phương pháp

**2- Thuật toán** :

Thuật toán in ra hệ số của các phương pháp Adam:

INPUT: số tự nhiên n>1

OUTPUT: các hệ số của phương pháp Adam

Bước 1: Tạo ra ma trận chứa hệ số của các  trong khai triển của :

Bước 2: đặt 

Bước 3: với i từ 0 đến n:

Với j từ 0 đến i: 

Bước 4: Tính hệ số :

Bước 5 Trong phương pháp Adam-Bashforth:

for k in range (1,n):

=1-sum(\*(1/(np.arange(k+1,1,-1))))

print()

Bước 6 Trong phương pháp Adam-Moulton:

for k in range (1,n):

=0-sum(\*(1/(np.arange(k+1,1,-1))))

print()

Bước 7 : nhập các thành 1 hàng với k từ 0 đến m-1 thành ma trận hàng B

Bước 8: Nhân ma trận B với ma trận A

Thuật toán Adam-Bashforth 4 bước dự đoán và điều chỉnh:

INPUT: 2 điểm đầu mút , số mốc chia N, điều kiện ban đầu 

OUTPUT: Giá trị xấp xỉ của tại điểm 

Bước 1: Đặt 

Bước 2: For i=1,2,3:



Bước 3: 

Bước 4: OUTPUT 

Bước 5 : For i=4,5,…,N+1:

Đặt 



Bước 6 : OUTPUT 

Bước 7: STOP

Thuật toán Adam-Moulton 4 bước dự đoán và điều chỉnh:

INPUT: 2 điểm đầu mút , số mốc chia N, điều kiện ban đầu 

OUTPUT: Giá trị xấp xỉ của tại điểm 

Bước 1: Đặt 

Bước 2: For i=1,2,3,…,N:



Bước 3: 

Bước 4: OUTPUT 

Bước 5 : For i=4,5,…,N:

Đặt 



Bước 6 : OUTPUT 

Thuật toán Adam-Bashford- Adam-Moulton 4 bước dự đoán và hiệu chỉnh :

INPUT: 2 điểm đầu mút , số mốc chia N, điều kiện ban đầu 

OUTPUT: Giá trị xấp xỉ của tại điểm 

Bước 1: Đặt 

Bước 2: For i=1,2,3:



Bước 3: 

Bước 4: OUTPUT 

Bước 5 : For i=4,5,…,N+1:

Đặt 



Bước 6 : OUTPUT 

Bước 7: STOP

**3- Ví dụ** :

Ví dụ 1: TÌm hệ số của thuật toán Adam-Bashforth bậc 4: 

Ta có : 

Ma trận hệ số của các  có dạng là: 

Ma trận hàng chứa các tích phân là: 

Nhân ma trận hàng với ma trận hệ số của các ,ta có:

=

Công thức Adam-Bashforth bậc 4 có dạng: 

Ví dụ 2: Tìm công thức của thuật toán Adam-Moulton bậc 4:



Ta có:



Ma trận hệ số của các  có dạng là: 

Ma trận hàng chứa các tích phân là: 

Nhân ma trận hàng với ma trận hệ số của các ,ta có:

=

Công thức Adam-Moulton bậc 4 có dạng: 

Ví dụ : Xét bài toán: , ,  với h= 

Kết quả của bài toán khi giải theo thuật toán Adam-Bashforth 4 bước:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | 0 1.000000  0.1 1.110342  0.2 1.242805  0.3 1.399717  0.4 1.583640  0.5 1.797422  0.6 2.044204  0.7 2.327457  0.8 2.651014  0.9 3.019117  1.0 3.436449 |
|  |  |

Kết quả của bài toán khi giải theo thuật toán Adam-Moulton 4 bước:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | 0 1.000000  0.1 1.110342  0.2 1.242805  0.3 1.399717  0.4 1.583649  0.5 1.797443  0.6 2.044239  0.7 2.327508  0.8 2.651085  0.9 3.019211  1.0 3.436570 |

Kết quả của bài toán khi giải theo phương pháp AB-AM 4 bước dự báo hiệu chỉnh:

|  |  |
| --- | --- |
| (dự báo)  (điều chỉnh) |  |
| 0.000000 nan 1.000000  0.100000 nan 1.110342  0.200000 nan 1.242805  0.300000 nan 1.399717  0.400000 1.583640 1.583649  0.500000 1.797433 1.797443  0.600000 2.044227 2.044238  0.700000 2.327495 2.327507  0.800000 2.651070 2.651084  0.900000 3.019194 3.019209  1.000000 3.436551 3.436567 |  |
|  |  |
|  |  |

Ví dụ : Xét bài toán: , , với và h= 

Kết quả của bài toán khi giải theo thuật toán Adam-Bashforth 4 bước:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | 0 0.000000  0.100000 0.000333  0.200000 0.002667  0.300000 0.009003  0.400000 0.021354  0.500000 0.041773  0.600000 0.072406  0.700000 0.115579  0.800000 0.173937  0.900000 0.250662  1.000000 0.349820 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Kết quả của bài toán khi giải theo thuật toán Adam-Moulton 4 bước:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | 0 0.000000  0.1 0.000333  0.2 0.002667  0.3 0.009003  0.4 0.021360  0.5 0.041793  0.6 0.072453  0.7 0.115669  0.8 0.174096  0.9 0.250932  1.0 0.350275 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Kết quả của bài toán khi giải theo phương pháp AB-AM 4 bước dự báo hiệu chỉnh:

|  |  |
| --- | --- |
| (dự báo)  (điều chỉnh) |  |
| 0.000000 nan 0.000000  0.100000 nan 0.000333  0.200000 nan 0.002667  0.300000 nan 0.009003  0.400000 0.021354 0.021360  0.500000 0.041779 0.041793  0.600000 0.072427 0.072453  0.700000 0.115627 0.115668  0.800000 0.174029 0.174095  0.900000 0.250828 0.250930  1.000000 0.350108 0.350269 |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**4-Kết luận**:

Các thuật toán Adam có ưu điểm là chỉ cần tính  qua  bằng việc tính qua hàm mà không cần chú ý đến bậc chính xác

Các thuật toán Adam có nhược điểm là phải sử dụng thêm các thuật toán khác để tính toán m bước đầu tiên.

Hướng dẫn sử dụng code:

File bao gồm 4 chương trình : chương trình tìm hệ số của phương pháp, thuật toán AB 4 bước, thuật toán AM 4 bước, THuật toán AB-AM 4 bước dự báo hiệu chỉnh

Để giải bài toán Cauchy chỉ cần nhập vào các biến x0,y0,xf,n và hàm def f(x,y)

